МБОУ ДО ЦДТ

Рыбинского района

Проектно - исследовательская работа

« Способы решений иррациональных уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств»

Направление: «Естественные науки и инженерные технологии»

Секция: «Прикладная и фундаментальная математика»

Автор работы: Кармацких Л.А.

Педагог дополнительного образования

МБОУ ДО ЦДТ

Рыбинского района

rib-rcdt@mail.ru

с. Новая Солянка. 2016

Аннотация.

Данная работа содержит теоретический и практический материал, в которой рассматриваются различные способы решения иррациональных уравнений, неравенств, систем на конкретных примерах. Исследовательская работа обуславливает выбор способа решения уравнений, неравенств и систем. Проблема, которая затронута в работе, актуальна для выпускников школы, т.к. может быть использована при подготовке к ЕГЭ по математике при решении задания как базового, так и профильного уровней.

Оглавление

I. Введение

Просто «думать» не умеет никто. Думать можно только над конкретным вопросом

Умение решать задачи в большой мере сводится к обучению тому, над, чем надо думать в ходе решения»

Доктор педагогических наук, профессор М.Волович

В школьном курсе алгебры рассматриваются различные виды уравнений и неравенств. Учащиеся решают линейные, квадратные и биквадратные, кубические, рациональные и иррациональные, задачи с параметрами, показательные, и логарифмические и другие уравнения, неравенства и системы.

В КИМах единого государственного экзамена по математике задачи по теме: «Решение рациональных и иррациональных уравнений, неравенств и систем» встречаются как в заданиях базового, так и профильного уровней. Данная работа посвящена изучению различных методов их решения. Решение задач вызывают у учащихся большие трудности, которые при изучении данного вида уравнений, неравенств, связаны со следующими их особенностями - обилие формул и методов, используемых при решении уравнений и неравенств данного вида.

Проблема заключается в необходимости знакомства и изучения различных способов решения иррациональных уравнений, неравенств и систем, поскольку на рассмотрение в школьном курсе математики сложных заданий отводится мало времени; в сознательном выборе рационального способа решения уравнений и неравенств.

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать иррациональные уравнения и неравенства для выполнения заданий части Единого Государственного экзамена. Они являются самыми сложными из всех заданий, которые необходимо решить из данного раздела ЕГЭ. Для того, чтобы решить подобные задания, требуются не только знания свойств функций, т.е теории, но и умение мыслить логически, поэтому необходимо в каждый момент проведения решения, представлять себе, что уже сделано. что еще надо сделать, и понимать, что означают полученные результаты решения данного задания.

Гипотеза: если способов решения иррациональных уравнений, неравенств несколько, то необходимо при решении конкретного уравнения или неравенства знать к какому виду его отнести и выбирать удобный, доступный пониманию в данной ситуации способ.

Цель: выявление различных способов решения иррациональных уравнений и неравенств, для выбора более рационального способа в конкретной ситуации.

Задачи:

1) Выяснить историю возникновения понятия иррациональности.

2) Провести исследование:

- выявить способы решения иррациональных уравнений;
- выявить способы решения и методы доказательства иррациональных неравенств;
- выявить способы решения систем иррациональных уравнений
-применить различные способы решения заданий по теме на конкретных примерах и заданиях ЕГЭ.

Объект исследовательской работы: способы решений иррациональных уравнений, неравенств и систем.

	Этапы исследования	**Методы исследования**
1	Изучение исторического и теоретического материала по теме	Анализ имеющейся литературы по теме
2	Практическая часть	Решение иррациональных уравнений и неравенств
3	Составление сборника задач по теме	Систематизация материала по теме.
4	Решение заданий	Анализ материалов сайтов сети творческих учителей.

II. Основная часть

Глава 1. Из истории.

Термин “рациональное” (число) происходит от латиноамериканского слова ratio – отношение, которое является переводом греческого слова “логос” в отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными. То есть нерациональными (по-гречески “алогос”) правда, первоначально термины “рациональный” и “иррациональный” относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно несоизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми, Теодор Киренский же - симметричными и асимметричными. В V-VI вв. римские авторы Капелла и Кассиодор переводили эти термины на латынь словами rationales и irrationalis. Термин “соизмеримый” (commensurabilis) ввел в первой половине VI в. другой римский автор- Боэций.

Древнегреческие математики классической эпохи пользовались только рациональными числами (вернее целыми, дробными и положительными). В своих “Началах” Евклид излагает учение об иррациональностях чисто геометрически.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа. Правда, уже в XVI в. отдельные ученые, в первую очередь итальянский математик Рафаэль Бомбелли и нидерландский математик Симон Стевин считали понятие иррационального числа равноправным с понятием рационального числа.

Еще до Бомбелли и Стевина многие ученые стран Среднего Востока в своих трудах употребляли иррациональные числа как полноправные объекты алгебры. Более того, комментируя “Начала” Евклида и исследуя общую теорию отношения Евдокса, Омар Хайям уже в начале XII в. теоретически расширяет понятие числа до положительного действительного числа. В том же направлении много было сделано крупнейшим математиком XIII в. ат-Туси.

Математики и астрономы Ближнего и Среднего Востока вслед за астрономами древнего Вавилона и эллинистической эпохи широко пользовались шестидесятеричными дробями, арифметические действия с которыми они называли “арифметикой астрономов”. По аналогии с шестидесятеричными дробями самаркандский ученый XV в. ал-Каши в работе “Ключ арифметики” ввел десятичные дроби, которыми он пользовался для повышения точности извлечения корней. Независимо от него по такому же пути шел открывший в 1585 г. десятичные дроби в Европе Симон Стевин, который в своих “приложениях к алгебре” (1594 г.) показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к действительному числу. Таким образом, уже в XVI в. зародилась идея о том, что естественным аппаратом для введения и обоснования понятия иррационального числа являются десятичные дроби. Появление “Геометрии” Декарта облегчило понимание связи между измерением любых отрезков (и геометрических величин вообще) и необходимости расширения понятия рационального числа. На числовой оси иррациональные числа, как и рациональные, изображаются точками. Это геометрическое толкование позволило лучше понять природу иррациональных чисел и способствовало их признанию.

В современных учебных руководствах основа определения иррационального числа опирается на идеи ал-Каши, Стевина и Декарта об измерении отрезков и о неограниченном приближении к искомому числу с помощью бесконечных десятичных дробей. Однако обоснованием свойств действительных чисел и полная теория их была разработана лишь в XIX веке.

Глава 2. Решение иррациональных уравнений, неравенств, систем.

2.1. Иррациональные уравнения.

2.1.1 Определение иррационального уравнения.

Уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется **иррациональным.**

Например: $\sqrt{x+5}$ + x = 4;

$(x-1)^{1/3} + (x+1)^{1/2} = 7$;

$\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} - 6 = 0$.

В элементарной математике решения иррациональных уравнений находят во множестве действительных чисел. Корни чётной степени в иррациональном уравнении предполагаются арифметическими.

2.1.2. Методы решения иррациональных уравнений.

Умение решать иррациональные уравнения есть умение избавляться от входящих в них радикалов, то есть сводить их к уравнениям, радикалов не содержащих. Конечно, освободиться от радикалов – это только первый этап решения, после него надо еще решить полученное уравнение. Но этот вопрос непосредственно к решению иррациональных уравнений не относится. Поскольку задачи с корнями степени выше 2 встречаются на экзаменах крайне редко, то мы сосредоточимся на уравнениях с квадратными радикалами.

Основное соображение, используемое при решении простейших уравнений, очевидно: если равны числа, то равны и их квадраты. Формально это можно записать так. "Из a = b следует, что $a^2 = b^2$".

Понятно, что возводя в квадрат обе части любого из наших уравнений, мы избавимся от радикалов и придем, соответственно, к уравнениям f(x) = g(x) и $f(x) = g^2(x)$, ведь возведение в квадрат обратно взятию квадратного корня.

1 способ (основной) решения иррационального уравнения является **метод последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень.**

$$\sqrt[2n]{A(x)} = \text{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) = B^{2n}(x), n \in N \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{A(x)} = \text{B(x)} \Leftrightarrow \text{A(x)=B}^{2n+1}\text{(x)}.$$

Следует иметь в виду, что при возведении частей уравнения в чётную степень могут появиться посторонние корни. Действительно, если обе части уравнения f(x) = g(x) возвести в квадрат, то получится уравнение $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 0$,

т,к. уравнение (f(x) - (g(x))(f(x) + g(x)) = 0, которое имеет решения f(x)=g(x) и решения уравнения f(x)=-g(x).

Поэтому проверка найденных значений неизвестного является обязательной частью.

Если уравнение содержит кубические радикалы,

$$\sqrt[3]{f(x)} \mp \sqrt[3]{g(x)} = C,$$

то его удобно решать путём возведения в куб обеих частей уравнения по формуле

$$(a \pm b)^3 = a^3 \mp b^3 \mp 3ab(a \mp b),$$

с последующей заменой выражения

$\sqrt[3]{f(x)} \mp \sqrt[3]{g(x)}$ на C,

при этом возможно появление посторонних корней, поэтому в данном случае **поверка обязательна.**

Решить уравнение

$\sqrt{3+2x} + \sqrt{5+x} = 5$. (*)

$\sqrt{3+2x} = 5 - \sqrt{5+x}$,

$3+2x=25-10\sqrt{5+x} + 5 + x$,

$10\sqrt{5+x} = 27 - x$, (**)

$500+100x=729-54x+x^2$, $x^2 - 154 + 229 = 0$;

$x_1 = 77 - 10\sqrt{57}$, $x_2 = 77 + 10\sqrt{57}.$

Значение x должно удовлетворить ограничениям

$5 - \sqrt{5+x} \ge 0,$ $27 - x \ge 0,$

т.к. уравнения (*) и (**) возводились в квадрат. Очевидно, что x_2 не удовлетворяет второму ограничению.

Ответ: $77 - 10\sqrt{57}$.

Примеры**.** ***Приложение 1***

2 способ. Введение новой переменной.

Для решения некоторых видов иррациональных уравнений указанный метод решения не всегда рационален. Можно воспользоваться **методом замены переменной,** относительно которой получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное уравнение. Введение нового неизвестного, относительно которого уравнение имеет более простой, легко приводимый к стандартному виду или даже просто упрощающее вид уравнения - – важнейший метод решения уравнений любых видов и типов.

Решить уравнение:

$(2x + 3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 20(x+3)$

$4x^2 + 12x + 9 - 3\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 20(x+3)$

$4x^2 - 8x - 51 - 3\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 0$

$\sqrt{x^2 - 2x - 6} = t$, $t \ge 0$

$x^2 - 2x - 6 = t^2$;

$4t^2 - 3t - 27 = 0$

$t = 3$, $t = -4/9$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x^2 - 2x - 6 = 9$;

$x = -3$; $x = 5$

Ответ: -3; 5.

Примеры. ***Приложение 2.***

3 способ. Исследование ОДЗ.

Приступая к решению иррационального уравнения, иногда целесообразно **предварительно определить область допустимых значений** неизвестного, так как может оказаться, что уравнение не определено в области действительных чисел.

ОДЗ уравнения – множество тех значений неизвестного, при котором имеют смысл его левая и правая части.

Во введении понятия ОДЗ особой необходимости нет, поскольку, как это следует из самого его определения, при решении любого уравнения мы не имеем права рассматривать значения неизвестного, не входящие в ОДЗ. Тем удивительнее, что сплошь и рядом приходится наблюдать «решения», в которых большая часть посвящена нахождению тех значений неизвестного, которые оно не может принимать, и откуда очень трудно понять, а чему же оно всё-таки равно.

Уравнение может быть правильно решено, если в решении отсутствует даже упоминание об ОДЗ. И наоборот, верно найденная ОДЗ и последующий отбор корней по нему, не гарантируют от ошибок. Универсальных рецептов здесь нет и быть не может.

Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x-x^2}=\sqrt[3]{x^3-4x+8}+x-4$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 6-x-x^2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 2 \\ x^2+x-6\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 2 \\ -3\leq x\leq 2 \end{cases}$ $x = 2$.

Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем уравнения.

4 способ. Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.

Сопряжённым выражением для суммы **(a+b)** является выражение **(a-b)**.

Решить уравнение:

$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$ (умножим обе части на выражение: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}$)

x + 3 – x – 8 = 5($\sqrt{x+3}$ - $\sqrt{x+8}$)

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = -1 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5 \end{cases}$$

2 $\sqrt{x+3}$ =4, отсюда x=1. Проверкой убеждаемся, что x = 1 является корнем данного уравнения.

Примеры. *Приложение 3.*

5 способ. Сведение уравнения к системе с помощью введения переменной.

Решить уравнение

$\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x+7} = 4$

Пусть $\sqrt{x+3}$ = u, $\sqrt[3]{x+7}$ =v.

Получим систему:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 - v^3 = x + 3 - x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 - v^3 = -4 \end{cases}$$

Решим методом подстановки. Получим u = 2, v = 2. Значит,

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt[3]{x+7} = 2 \end{cases}$$

получим x = 1.

Ответ: x = 1.

6 способ. Выделение полного квадрата.

Решить уравнение $\sqrt{\cos^2 0{,}5x - 6\cos 0{,}5x + 9} - \sqrt{4\cos^2 0{,}5x - 12\cos 0{,}5x + 9} = 1$

$\sqrt{(\cos 0{,}5x - 3)^2} - \sqrt{(2\cos 0{,}5x - 3)^2} = 1$

$|\cos 0{,}5x - 3| - |2\cos 0{,}5x - 3| = 1$.

Раскроем модули. Т.к. -1≤cos0,5x≤1, то -4≤cos0,5x-3≤-2,

значит, $|\cos 0{,}5x - 3| = 3 - \cos 0{,}5x$.

Аналогично, $|2\cos 0{,}5x - 3| = 3 - 2\cos 0{,}5x$

Тогда получим уравнение

$\cos 0{,}5x = 1$

$x = 4\pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $4\pi n, \quad n \in Z.$

7 способ. Метод оценки

Решить уравнение

$\sqrt{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = -x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

ОДЗ: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \ge 0,$

по определению правая часть $-x^3 + 2x^2 + 4x - 8 \ge 0$

получим: $\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \ge 0 \\ x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \le 0 \end{cases}$ т.е. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0.$

Решив уравнение разложением на множители, получим: $x = 2$, $x = -2$

8 способ: Использование свойств монотонности функций.

Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 6$.

Функции $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{x+3}, y = \sqrt{x+8}$ строго возрастают.

Сумма возрастающих функций есть возрастающая функция и данное уравнение имеет не более одного корня.

Подбором находим $x = 1$.

Ответ: 1.

9 способ. Использование векторов.

Решить уравнение $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

ОДЗ: $-1 \le x \le 3$.

Пусть вектор $a\{x;1\}, в\{\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x}\}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{в} = x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$ - есть левая часть.

Найдем произведение их длин $|\vec{a}| \cdot |\vec{в}| = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Это есть правая часть. Получили $\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}|$, т.е. векторы а и в – коллинеарны. Отсюда $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$. Возведем обе части в квадрат.

Решив уравнение, получим х = 1 и х $=1 \pm \sqrt{2}$.

2.2. *Иррациональные неравенства.*

2.2.1. Определение иррационального неравенства.

Неравенство, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется **иррациональным.**

Так называют неравенства, в которых неизвестные величины встречаются под знаком корня. Если в иррациональном уравнении заменить знак "=" любым из знаков "<", ">", "≤" или "≥", получится иррациональное неравенство. Практически все иррациональные неравенства, встречающиеся на вступительных экзаменах, содержат только квадратные корни. Именно на таких неравенствах мы и сосредоточимся.

2.2.2. Методы решения иррациональных неравенств.

При решении иррациональных неравенств используется следующее утверждение:

Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают только неотрицательные значения, то, возведя обе части неравенства в квадрат (или в любую чётную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному (на множестве X). Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечётную степень (с сохранением знака неравенства) всегда является равносильным преобразованием неравенства.

Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)}<g(x)$. (1).

Ясно, что решение этого неравенства является в то же время решением неравенства $f(x)\geq 0$ и решением неравенства $g(x)>0$ (из неравенства (1) следует, что $g(x)>\sqrt{f(x)}\geq 0$). Значит неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \\ \sqrt{f(x)}<g(x). \end{cases}$$

Так как при выполнении условий, задаваемых первыми двумя неравенствами этой системы, обе части третьего неравенства системы определены и принимают только неотрицательные значения, то их возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Выполнив это преобразование, придём к системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Итак, неравенство $\sqrt{f(x)}$ <g(x) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь неравенство вида $\sqrt{f(x)}$ >g(x). (2)

Как и выше, заключаем, что f(x)≥0, но в отличие предыдущего случая здесь g(x) может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения. Поэтому заданное неравенство (2) рассмотрим в каждом из следующих случаев: g(x)<0, g(x)≥0. Получим совокупность систем

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x). \end{cases}$$

В первой из этих систем можно опустить последнее неравенство – оно вытекает из первых двух неравенств системы. Во второй системе можно выполнить возведение в квадрат обеих частей последнего неравенства. В итоге приходим к следующему результату: неравенство $\sqrt{f(x)}$ >g(x) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Решение иррациональных неравенств обычно состоит в том, что с помощью некоторых преобразований их заменяют равносильными им рациональными неравенствами или системами неравенств. Этими преобразованиями является, кроме рассмотренных выше элементы переменных и разложения на множители, ещё и возвышение обеих частей неравенства в одну и ту же степень. При этом конечно, нужно следить, чтобы не приобрести посторонних решений. Поэтому полезно там, где это возможно, находить область определения неравенства, а также область возможных значений решений. ***(Приложение №4)***

Приступая к решению неравенства $\sqrt{x-2}$<1-х, следует сначала установить область определения неравенства. Она определяется условием х-2$\geq$0, или х$\geq$2. Но так как в этой области левая часть неравенства неотрицательна, то должно выполняться ещё одно условие: правая часть неравенства должна быть неотрицательна, т.е. 1-х$\geq$0, или х$\leq$1. Это условие противоречит ранее установленному условию х$\geq$2, и поэтому данное неравенство не имеет решений.

2.2.3. Доказательство неравенств.

1) Метод оценки разности. Суть этого метода заключается в следующем: для того чтобы установить справедливость неравенства f(x;y;z)> g(x;y;z) (f<g, f≤g, f ≥g), составляют разность f(x;y;z) - g(x;y;z) и доказывают, что она положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительная).

2) Синтетический метод доказательства неравенства. Суть этого метода заключается в следующем: с помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (опорных) неравенств. Опорными неравенствами являются, например, такие:

1. $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, где $x \ge 0, y \ge 0$ (неравенство Коши);
2. $x+\frac{1}{x} \ge 2$, где x>0;
3. $-1 \le \sin\alpha \le 1$;
4. $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

3) Доказательство неравенства методом от противного. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нужно доказать истинность неравенства

$$f\,(x, y, z) > g\,(z,y,z). \qquad (1)$$

Предполагают противное, т.е. что хотя бы для одного набора переменных справедливо равенство

$$f\,(x, y, z) \ge g\,(z,y,z). \qquad (2)$$

Используя свойства неравенства, выполняют преобразования неравенства (2). Если в результате этих преобразований получается ложное неравенство, то это означает, что предположение о справедливости неравенства (2) неверно, а потому верно неравенство (1).

Примеры доказательств иррациональных неравенств, приведены в ***приложении №5.***

2.3. Иррациональные системы уравнений.

2.3.1. Определение иррациональной системы.

Система уравнений, в которой, по крайней мере, одно уравнение иррациональное, называется **иррациональной системой**.

2.3.2. Методы решения иррациональной системы.

При решении иррациональных систем используются те же приёмы, что и при решении иррациональных уравнений.

Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$$

D(f): $x\geq 0$, $y\geq 0$. Возведём обе части второго уравнения в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

равносильную данной. Умножим обе части первого уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2y^2}+2\sqrt{xy}=16, \\ x+y+2\sqrt{xy}=16. \end{cases}$$

Вычтем почленно из первого уравнения второе, получим уравнение

$$\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y.$$

Возведём обе части этого уравнения в квадрат, получим равносильное ему уравнение $2x^2+2y^2=x+y$;

$2x^2+2y^2=x^2+2xy+y^2$; $x^2-2xy+y^2=0$; $(x-y)^2=0$; $x-y=0$; $x=y$.

Решим систему

$$\begin{cases} x=y \\ x+y+2\sqrt{xy}=16, \end{cases}$$

равносильную данной. Получим $x=4$, $y=4$.

Ответ: $\{(4;4)\}$.

III. Заключение.

Итак, изучив литературу, выяснили:

• Уравнения, которые содержат переменную под знаком корня, называются иррациональными.

• Основными методами иррациональных уравнений являются:

а) возведение обеих частей уравнения в квадрат (или n-ую степень);

б) введение новой переменной;

в)умножение обеих частей уравнения на сопряжённое выражение.

• Неравенства, содержащие переменную под знаком радикала, называются иррациональными.

• Решение иррациональных неравенств обычно состоит в том, что с помощью некоторых преобразований их заменяют равносильными им рациональными неравенствами или системами неравенств.

• При решении иррациональных уравнений и неравенств могут появиться посторонние корни. Исключить их можно с помощью проверки. Проверка является элементом решения и необходима даже в тех случаях, когда лишние корни не появились, но ход решения был таков, что они могли появиться.

• При доказательстве иррациональных неравенств используют следующие методы:

а) метод оценки разности;

б) синтетический метод доказательства неравенства;

в) метод доказательства от противного;

• Система уравнений, в которой, по крайней мере, одно уравнение иррациональное, называется иррациональной системой уравнений.

• При решении иррациональных систем используются те же приёмы, что и при решении иррациональных уравнений

Создан сборник задач для самостоятельного решения***. Приложение №6***

Кроме того, работа содержит историческую справку.

Работу можно будет использовать:

- учителям - для всех видов обучения: для проведения занятий по подготовке к ЕГЭ, при профильном обучении математике,
- ученикам - при самостоятельной подготовке к экзаменам.

IV.Литература

1) Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике - Москва: Издательство “Наука”, 1986

2)) И.Ф.Шарыгин. Факультативный курс по математике. Москва: Издательство «Просвещение», 1989.

3) Н.Я.Виленкин. Алгебра для 9 класс. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики – Москва: Издательство «Просвещение», 1998.

4) Решение задач. Математика. С3. под редакцией А.П.

А.П.Семенова и И. В. Ященко.

5) Интернет ресурсы:

- сайт http://www.alexlarin.net.ru/ege.html;
- сайт учителя математики Л.И. Ковальчук;
- сайт учителя математики Е.В. Чудаевой.

V. Приложения

Приложение 1: «*Примеры решения иррациональных уравнений способом возведения в степень*»

Пример 1: Решить уравнение $\sqrt{5x-16}=x-2$.

Решение: Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{5x-16}\right)^2=(x-2)^2$$

$$5x-16=x^2-4x+4$$

$$x^2-9x+20=0$$

Решив квадратное уравнение, получим два корня: $x_1=4$ и $x_2=5$.

Выполнив проверку, убедимся, что оба корня являются решениями этого уравнения.

Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt{1-x}$ =5.

Решение: $D(f):\begin{cases} x-7\ge 0, \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x\le 1. \end{cases}$

Полученная система неравенств решения не имеет, следовательно, не имеет решений и данное уравнение.

Пример3: Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+4}$.

Решение

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x - 5 + 2\sqrt{x-5}\ \sqrt{x+3} + x + 3 = 2x + 4,$$

$$\sqrt{x-5}\ \sqrt{x+3} = 3.$$

После возведения обеих частей в квадрат ещё раз, найдём:

$$(x-5)(x+3) = 9;$$

$x^2 - 2x - 24 = 0;$

$x_1 = -4, \; x_2 = 6.$

Корень $x_1 = -4$ – посторонний, так как $-4 \notin D(f)$. Проверкой убеждаемся, что $x_2 = 6$ – корень уравнения.

Ответ: 6.

Пример 4: Решить уравнение

$$\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}} = \sqrt{x^3-1} + 2\sqrt{x}\,.$$

Решение: Нахождение ОДЗ в этом уравнении представляет собой достаточно трудную и совершенно ненужную задачу. Возведем уравнение в квадрат:

$$x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x} = x^3-1+4\sqrt{x^3-1}\,\sqrt{x}+4x,$$

$$\sqrt{x^3-1}\,\sqrt{x}=0;\; x_1=1,\; x_2=0;$$

$x_2=0$ – лишний корень (проверка).

Ответ: 1.

Пример 5: Решить уравнение $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$.

Решение: В этом уравнении нахождение ОДЗ приносит несомненную пользу, поскольку оно состоит из двух значений: x=1 и x=0. Проверка показывает, что корнем уравнения является лишь значение x=1.

Ответ: 1.

Приложение 2: ***«Примеры решения иррациональных уравнений способом замены переменной»***

Пример 1*:* $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0$.

Решение: Сделаем замену $y=\sqrt{x^2 3x+6}$. (Можно за новое неизвестное принять x^2-3x, но в этом случае решение будет несколько более сложным). Тогда $y\geq 0$, $x^2-3x=y^2-6$.

Получим относительно *у* уравнение

$$2y^2-12+y+2=0,$$

$$2y^2+y-10=0;$$

$$y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2};$$

y_2 не удовлетворяет условию $y\geq 0$. Возвращаемся к x:

$$\sqrt{x^2-3x+6}=2;$$

$$x_1=1,\ x_2=2.$$

Ответ: 1; 2.

Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt{1-x}=5$.

Решение: $D(f):\begin{cases}x-7\geq 0,\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 7\\ x\leq 1.\end{cases}$

Полученная система неравенств решения не имеет, следовательно, не имеет решений и данное уравнение.

Ответ: не имеет решений.

Пример 3: Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+4}$.

Решение: $D(f):\begin{cases}x-5\geq 0\\ x+3\geq 0\\ 2x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 5\\ x\geq -3\\ x\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 5.$

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x - 5 + 2\sqrt{x-5}\,\sqrt{x+3} + x + 3 = 2x + 4,$$

$$\sqrt{x-5}\,\sqrt{x+3}=3.$$

После возведения обеих частей в квадрат ещё раз, найдём:

$$(x -5)(x +3) = 9;$$

$$x^2 – 2x – 24 = 0;$$

$$x_1 = -4,\ \ x_2 = 6.$$

Корень x_1 = -4 – посторонний, так как -4$\notin$D(f). Проверкой убеждаемся, что x_2 = 6 – корень уравнения.

Ответ: 6.

Пример 4: Решить уравнение $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}$ = 4 - $\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}$.

Решение: Положим, t = $\sqrt{-x}$, $t \ge 0$, $t^2 = -x$, $x \le 0$.

Подставим найденные значения для $\sqrt{-x}$ и –x в данное уравнение, получим:

$$\sqrt{4+t^2+4t} = 4- \sqrt{4+t^2-4t} \quad \Leftrightarrow |2+t| = 4-|2-t|.$$

Так как $t \ge 0$, то $|2+t|$= 2+t,

$$2+t = 4-|2-t|,$$

$$|2-t| = 2-t.$$

Решение полученного уравнения является $t \le 2$ или $t^2 \le 4$,

$$-x \le 4 \quad x \ge -4.$$

С учётом $x \le 0$ получим $-4 \le x \le 0$.

Ответ: $[-4;0]$

Пример 5*:* Решить уравнение $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.*Решение:* Введём новую переменную $y = x^2 + x$, тогда получим уравнение:$\sqrt{y+4}+\sqrt{y+1}=\sqrt{2y+9}$. Решим полученное иррациональное уравнение возведением обеих частей в квадрат:

$$y+4+2\sqrt{y+1}\sqrt{y+1}+y+1=2y+9$$

$$2\sqrt{(y+4)(y+1)} = 4$$

$$\sqrt{(y+4)(y+1)} = 2$$

$$y^2+5y+4$$

$$y^2+5y=0$$

$$y(y+5)=0$$

при y=0 полученное уравнение верно, следовательно, y=0 является корнем.

При y=- 5 выражения $\sqrt{y+4}, \sqrt{y+1}, \sqrt{2y+9}$ теряют смысл.

$$x^2 + x = 0$$
$$x(x+1) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -1.$$

Проверкой убеждаемся, что x_1=0 и x_2=-1 являются корнями заданного уравнения.

Ответ: {-1;0}

Пример 6*:* Решить уравнение $|2-x|$ = 4$\sqrt{x}$ +4.

Решение: ОДЗ: x ≥ 0. Данное уравнение равносильно совокупности следующих систем:

$$\grave{a})\begin{cases} x \geq 2, \\ x - 2 = 4\sqrt{x} + 4, \end{cases} \qquad \acute{a})\begin{cases} 0 \leq x < 2, \\ 2 - x = 4\sqrt{x} + 4. \end{cases}$$

Решим эти системы:

$$a) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x - 4\sqrt{x} - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \sqrt{x} = 2 + \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = 14 + 4\sqrt{10};$$

$$\acute{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2, \\ x + 4\sqrt{x} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x2 \\ (\sqrt{x})_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ: 14+4$\sqrt{10}$.

Приложение 3: «*Решение иррациональных уравнений способом домножения на сопряженное выражение*»

Пример: Решить уравнение $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1.$

Решение. Если решать это уравнение с помощью замены или последовательного возведения в квадрат, возникнет уравнение 4-й степени. Посмотрим, что дает домножение обеих частей на выражение, сопряженное левой части. Умножим обе части на сумму корней ((a-b)(a+b) = a^2 -b^2), получим:

$$2x+1=(2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2.})$$

Отметим, кстати, что в нуль наш множитель не обращается, значит, посторонние корни не появляются. Благодаря тому, что разность подкоренных выражений равна правой части исходного уравнения, в результате домножения оно распадается на два более простых.

1) 2x+1=0,

$x_1=-\frac{1}{2}$;

2) $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1.$

Можно во втором уравнении, как обычно, уединить один радикал, возвести обе части в квадрат и т.д. А можно поступить иначе. Поскольку мы ищем лишь те корни этого уравнения, которые являются одновременно и корнями исходного, то эти корни должны удовлетворять уравнению, являющемуся их суммой, т.е. уравнению $\sqrt{x^2+5x+3}$=x+1, откуда $x_2=-\frac{2}{3}$.

Проверка показывает, что оба корня подходят:

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

Приложение 4: «*Решение иррациональных неравенств*».

Пример1*:* Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-12}<$ x.

Решение: Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2\text{-x-12}\geq 0, \\ x>0, \end{cases}$$

$$x_2\text{-x-12}<x^2.$$

Решив систему, находим $x \geq 4$.

Пример 2*:* Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}>$x+3.

Решение: Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+3<0, \\ x^2\text{-3x+2}\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3\geq 0; \\ x^2\text{-3x+2}\geq 0; \\ x^2\text{-3x+2}>(x+3)^2. \end{cases}$$

Второе неравенство второй системы можно опустить как следствие третьего неравенства той же системы.

Решив первую систему, получим x<-3, из второй системы мы получаем $-3\leq x<-\frac{7}{9}$. Объединив найденные решения, получим $x<-\frac{7}{9}$.

Приложение 5: «*Примеры доказательства иррациональных неравенств*»

Рассмотрим доказательство иррациональных неравенств разными методами.

1) Метод оценки разности.

Пример. Доказать, что если x≥ 0, y≥ 0, то $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (*среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического;* это неравенство называется *неравенством Коши).*

Решение. Составим разность $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}$.

Имеем

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}.$$

Неравенство $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит, $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, причем равенство имеет место лишь в случаях x=y.

Из неравенства Коши, в частности, следует неравенство x+$\frac{1}{x}\geq 2$,

справедливое для x >0.

2) Синтетический метод.

Пример: Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$,где a, b, c, d - неотрицательные числа.

Решение. Используем здесь в качестве опорного неравенство Коши, составленное для неотрицательных чисел x= $\frac{a+b}{2}$, y= $\frac{c+d}{2}$. Имеем $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}*\frac{c+d}{2}}$. Применив теперь неравенство Коши к числам a и b, а также c и d, получим

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}*\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}*\sqrt{cd}}$$. Но $\sqrt{\sqrt{ab}*\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$.

Таким образом, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Равенство имеет место в случае, когда a=b=c=d.

3) Доказательство методом от противного.

Пример: Доказать, что если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, то $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Решение: Предположим противное, т.е. что для некоторого набора значений a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Возведем обе части в квадрат. Получим:

$$ab+bc+ad+cd<ab+2\sqrt{abcd}+cd,$$

откуда $$bc+ad<2\sqrt{abcd}$$

и далее $$\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}.$$

Но это противоречит неравенству Коши, составленному для неотрицательных чисел bc и ad. Значит, наше предположение неверно, т.е. для любых неотрицательных значений a,b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Приложение №6: «*Сборник задач для самостоятельного решения*»

Иррациональные уравнения.

Решите уравнения:	**Ответ:**
1. $2\sqrt{x^2-2x-2{,}75}=x-2$	$\{3\}$
2. $\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}=x+2$	$\{0;2{,}5\}$
3. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{9-x}=\dfrac{6}{\sqrt{9-x}}$	$\{8\}$
4. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10$	$\{-3{,}5;6{,}5\}$
5. $\sqrt{3x+5}+\sqrt{10-x}=\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}$	$\left\{-\dfrac{5}{4};5\right\}$
6. $\sqrt{x^2-26x+169}-\sqrt{9-6x+x^2}=2$	$\{7\}$
7. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$	$\{-109;80\}$
8. $x(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x})=0$	$\{0;1\}$
9. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$	$\{4;-3\}$
10. $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$	$\{-3\}$
11. $(x+4)(\sqrt{3-x}-2x+3)=0$	$\{-4;2\}$
12. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$	$\{-5;2\}$
13. $\sqrt{x(2-x^2}-\sqrt{x}=0$	$\{0;1\}$
14. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$	$\{-3;6\}$

Иррациональные неравенства.

Решите неравенства:	**Ответ:**
1. $-3x+6>0$	$(-\infty;2)$
2. $4(x+1)-3x\leq 7x+10$	$[-1;+\infty)$
3. $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$	$\left(-\infty;2\frac{1}{4}\right)$
4. $(x-3)^2-11\geq(x+2)^2$	$(-\infty;-0,6]$
5. $(2x-1)^2-8x<(3-2x)^2$	$(-\infty;+\infty)$
6. $(x-2)^2-2x+10<(3-x)^2$	Нет решения

Иррациональные системы уравнений:

Решите системы: **Ответ:**

1. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11} - \sqrt{3x+y-9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11} + \sqrt[4]{3x+y-9} = 3. \end{cases}$ $\{(3;1)\}$

2. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$ $\{(1;4)\}$

3. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x+y)}^{\,2} = 1. \end{cases}$ $\{(2;1), (1;2), (-1;-2), (-2;-1)\}$

4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x+y=28 \end{cases}$ $\{(1;27), (27;1)\}$

5. $\begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x+y=5 \end{cases}$ $\{(4;1), (1;4)\}$